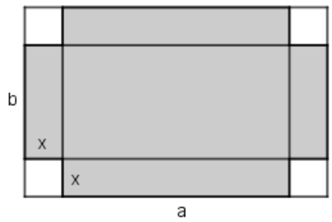
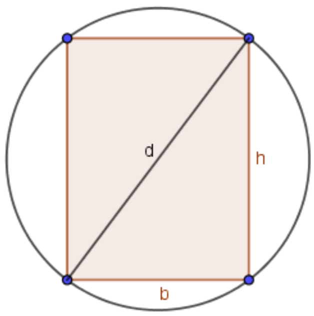
Extremwertaufgaben

1. Die Zahl 12 soll in zwei Summanden zerlegt werden, so dass
    a. ihr Produkt maximal wird;
    b. die Summe ihrer Quadrate minimal wird;
    c. die Summe aus dem Quadrat des einen Summanden und dem doppelten Quadrat des anderen Summanden minimal wird;
    d. das Produkt des Kubus des einen Summanden mit dem anderen Summanden maximal wird.
2. Welches von allen Rechtecken
    a. mit dem Umfang u (1 m)
    b. mit der Diagonale d (1 m)

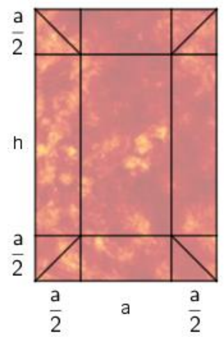
    hat den größten Flächeninhalt, und wie groß ist er?
3. Welches von allen Rechtecken mit dem Flächeninhalt A (100 cm²) hat
    a. den kleinsten Umfang
    b. die kürzeste Diagonale?
4. Aus einem rechteckigen Blech mit den Seitenlängen a und b soll eine quaderförmige Dose hergestellt werden, indem man an den Ecken Quadrate ausschneidet und die übriggebliebenen Rechtecke hochbiegt. Wie lang muss die Seite der Quadrate sein, wenn das Volumen der Dose möglichst groß werden soll, und wie groß ist das Volumen?

    a. a = 40 cm, b = 25 cm
    b. a = b = 60 cm
5. Aus einem Baumstamm mit dem Durchmesser d (75 cm) soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt von maximaler Tragfähigkeit geschnitten werden. Die Tragfähigkeit ist proportional zum Produkt aus der Breite des Balkens mit dem Quadrat der Höhe. Zeige, dass sich die Seitenlängen des Balkenquerschnitts zueinander wie 1 : √2 verhalten!

6. Ein Paketservice berechnet das Porto nach der Summe aus der längsten und der kürzesten Paketseite. Wie lang müssen die Seiten eines quaderförmigen Pakets sein, wenn diese Summe 90 cm betragen darf und der Inhalt maximal werden soll, und wie groß ist er in diesem Fall? (Das Volumen ist am größten, wenn die dritte Seite genauso lang ist wie die längste.)
7. Ein Getränkekarton mit dem Volumen V (1 dm³) soll die Form eines quadratischen Prismas haben.
    a. Wie groß müssen Seitenlänge und Höhe des Prismas sein, damit die Oberfläche minimal wird?
    b. Wiederhole die Berechnungen, wobei du auch die Klebeflächen berücksichtigst (Bild).



8. Wie muss man den Radius und die Höhe einer zylindrischen Dose vom Volumen V (250·π cm³) wählen, damit die Oberfläche minimal wird?
9. Wie 8., für einen oben offenen Topf!
10. Bei einem quaderförmigen Getränkekarton mit dem Volumen 800 cm³ soll die längste Seite 4 mal so lang sein wie die kürzeste. Wie lang müssen die Seiten sein, damit die Oberfläche minimal wird? Wie groß ist die Oberfläche?
11. Einem rechtwinkeligen Dreieck mit den Katheten a (30 cm) und b (40 cm) soll das flächengrößte Rechteck eingeschrieben werden, so dass
    a. zwei Seiten auf den Katheten des Dreiecks liegen,
    b. eine Seite auf der Hypotenuse des Dreiecks liegt?

    Berechne in beiden Fällen des Flächeninhalt des Rechtecks.
12. Einer Kugel vom Radius R (12 cm) soll
    a. der Zylinder mit der größtmöglichen Mantelfläche
    b. der Kegel mit dem größtmöglichen Volumen eingeschrieben werden.
13. Einer Halbkugel vom Radius R (12 cm) ist ein Kegel einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt, so dass
    a. das Volumen maximal wird;
    b. die Mantelfläche maximal wird.
14. Ein 1 m langer Draht wird in zwei Teile geteilt. Aus dem einen Teil wird ein Quadrat geformt, aus dem anderen ein Kreis. Wie lang müssen die Stücke sein, damit die Summe der Flächeninhalte von Quadrat und Kreis minimal wird?

Ergebnisse:

1.
   a. $x = y = 6$
   b. $x = y = 6$
   c. $x = 8$, $y = 4$
   d. $x = 9$, $y = 3$
2.
   a. $a = b = u/4$ (25 cm), $A = u^2/16$ (625 cm²)
   b. $a = b = d/\sqrt{2}$ (70,7 cm), $A = d^2/2$ (0,5 m²)
3.
   a. $a = b = \sqrt{A}$ (10 cm), $u = 4\sqrt{A}$ (40 cm)
   b. $a = b = \sqrt{A}$ (10 cm), $d = \sqrt{(2A)}$ (14,1 cm)
4.
   a. $x = 5$ cm, $V = 2250$ cm³
   b. $x = 10$ cm, $V = 16000$ cm³
5. $b = d/\sqrt{3}$ (43,3 cm), $h = d\sqrt{2}/\sqrt{3}$ (61,2 cm)
6. $x = y = 60$ cm, $z = 30$ cm, $V = 108$ dm³
7.
   a. $a = h = \sqrt[3]{V}$ (10 cm) (Würfel)
   b. $a = 7{,}94$ cm, $h = 15{,}87$ cm
8. $r = \sqrt[3]{(V/2\pi)}$ (5 cm), $h = 2\cdot\sqrt[3]{(V/2\pi)}$ (10 cm)
9. $r = h = \sqrt[3]{(V/\pi)}$ (6,3 cm)
10. $x = 5$ cm, $y = 8$ cm, $z = 20$ cm, $O = 600$ cm²
11.
   a. $x = a/2$ (15 cm), $y = b/2$ (20 cm), $A = ab/4$ (300 cm²)
   b. $x = c/2$ (25 cm), $b = h_c/2$ (12 cm), $A = c\cdot h_c/4$ (300 cm²)
12.
   a. $r = R/\sqrt{2}$ (8,5 cm), $h = R\sqrt{2}$ (17,0 cm)
   b. $r = R\sqrt{8}/3$ (11,3 cm), $h = 4R/3$ (16 cm)
13.
   a. $r = R\sqrt{2}/\sqrt{3}$ (9,8 cm), $h = R/\sqrt{3}$ (6,9 cm)
   b. $r = R$, $h = 0$ (Randextremum)
14. $x = \pi/(4+\pi)$ m = 44 cm, $y = 4/(4+\pi)$ m = 56 cm