

Ableitungsregeln

Potenzregel

1. Ermittle die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a. $f(x) = \frac{1}{x^3}$

b. $f(x) = \frac{3}{x^2}$

c. $f(x) = \frac{1}{2 \cdot x^4}$

d. $f(x) = \frac{2}{3x^6}$

e. $f(x) = x^2 + \frac{2x}{3} - \frac{1}{6} - \frac{4}{x}$

f. $f(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{3x}$

g. $f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{6}{x^3} + \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x} + 2$

h. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

i. $f(x) = \sqrt{x^3}$

j. $f(x) = 8 \cdot \sqrt{x} - 2 \cdot \sqrt[4]{x}$

k. $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Produktregel

2. Berechne die Ableitungen der folgenden Funktionen

(1) mit Hilfe der Produktregel,

(2) indem du zuerst ausmultiplizierst!

a. $y = (2x + 3) \cdot (2x - 1)$

b. $y = (x + 4) \cdot (x^2 - 2)$

c. $y = (3x^2 - 5) \cdot (x^2 + 3x)$

d. $y = (x^2 + 2x + 1)(2x - 2)$

e. $y = (2x + 3) \cdot (4x^2 - 6x + 9)$

f. $y = (x^3 + 4x - 5) \cdot (2x^2 - x + 6)$

Quotientenregel

3. Differenziere:

a. $y = \frac{x-1}{x+4}$

b. $y = \frac{2x+1}{3x-5}$

c. $y = \frac{2x}{x^3+2}$

d. $y = \frac{x^2-5x}{x^2-4}$

e. $y = \frac{2x^2-3x+1}{6x+5}$

f. $y = \frac{x^3-1}{x^2+3x}$

4. Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen

(1) mit Hilfe der Quotientenregel,

(2) indem du zuerst dividierst!

a. $y = \frac{x^2+3}{x}$

b. $y = \frac{x^2-6x+9}{3x}$

c. $y = \frac{3x^3-4x^2}{x^2}$

d. $y = \frac{x^3+6x^2-8x-2}{4x^2}$

e. $y = \frac{2x-5}{x^3}$

f. $y = \frac{3x^2+8}{12x^3}$

Kettenregel

5. Differenziere:

a. $f(x) = (2x + 3)^5$

b. $f(x) = (x^2 - 9)^3$

c. $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$

d. $f(x) = \frac{1}{(10x-3)^2}$

e. $f(x) = \sqrt{6x-1}$

f. $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

Exponential-, Logarithmus- und trigonometrische Funktionen

Berechne die Ableitung der folgenden Funktionen!

6.

a. $f(x) = x \cdot e^x$

b. $f(x) = x^2 \cdot e^x$

c. $f(x) = (3x - 2) \cdot e^x$

d. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

e. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

f. $f(x) = e^{3x}$

g. $f(x) = e^{0,1x+3}$

h. $f(x) = e^{x^2}$

7.

a. $f(x) = x \cdot \ln(x)$

b. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

c. $f(x) = (\ln x)^3$

d. $f(x) = \ln(x^3)$

e. $f(x) = \ln(2x - 5)$

f. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

8.

a. $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

b. $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

c. $f(x) = \sin(3x)$

d. $f(x) = 3 \cdot \sin(2x + \pi)$

e. $f(x) = \cos(x^2)$

f. $f(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

Kurvendiskussionen

Untersuche und zeichne folgende Funktionen (Definitionsmenge, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Gleichung der Wendetangenten, Asymptoten).

Gebrochenrationale Funktionen

9. $f(x) = \frac{2x+1}{2x-3}$

10. $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

11. $f(x) = \frac{x^2+2x}{x+1}$

12. $f(x) = \frac{x^2-x-1}{x-2}$

13. $f(x) = \frac{-x^2+2x+2}{x+1}$

14. $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$

(Lockenkurve der Maria Agnesi)

15. $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ (Schlangenkurve)

16. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

17. $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$

Exponentialfunktionen

$$18. f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{Kettenlinie})$$

$$19. f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$20. f(x) = x \cdot e^x$$

$$21. f(x) = x^2 \cdot e^x$$

$$22. f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$$

$$23. f(x) = 8x^2 \cdot e^{-2x}$$

$$24. f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

(Gauss'sche Glockenkurve)

Ergebnisse:

1.

$$a. f'(x) = -\frac{3}{x^4}$$

$$b. f'(x) = -\frac{6}{x^3}$$

$$c. f'(x) = -\frac{2}{x^5}$$

$$d. f'(x) = -\frac{4}{x^7}$$

$$e. f'(x) = 2x + \frac{2}{3} + \frac{4}{x^2}$$

$$f. f'(x) = -\frac{9}{x^4} + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{3x^2}$$

$$g. f'(x) = -\frac{4}{x^5} + \frac{18}{x^4} - \frac{24}{x^3} + \frac{8}{x^2}$$

$$h. f'(x) = \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$$

$$i. f'(x) = \frac{3 \cdot \sqrt{x}}{2}$$

$$j. f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

$$k. f'(x) = \frac{1}{6 \cdot \sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^3}}$$

2.

$$a. y' = 8x + 4$$

$$b. y' = 3x^2 + 8x - 2$$

$$c. y' = 12x^3 + 27x^2 - 10x - 15$$

$$d. y' = 6x^2 + 4x - 2$$

$$e. y' = 24x^2$$

$$f. y' = 10x^4 - 4x^3 + 42x^2 - 28x + 29$$

3.

$$a. y' = \frac{5}{(x+4)^2}$$

$$b. y' = -\frac{13}{(3x-5)^2}$$

$$c. y' = \frac{-4x^3 + 4}{(x^3 + 2)^2}$$

$$d. y' = \frac{5x^2 - 8x + 20}{(x^2 - 4)^2}$$

$$e. y' = \frac{12x^2 + 20x - 21}{(6x + 5)^2}$$

$$f. y' = \frac{x^4 + 6x^3 + 2x + 3}{(x^2 + 3x)^2}$$

4.

$$a. y' = 1 - \frac{3}{x^2}$$

$$b. y' = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2}$$

$$c. y' = 3$$

$$d. y' = \frac{1}{4} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}$$

$$e. y' = -\frac{4}{x^3} + \frac{15}{x^4}$$

$$f. y' = -\frac{1}{4x^2} - \frac{2}{x^4}$$

5.

$$a. f'(x) = 10 \cdot (2x + 3)^4$$

$$b. f'(x) = 6x \cdot (x^2 - 9)^2$$

$$c. f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 3)^2}$$

$$d. f'(x) = -\frac{20}{(10x - 3)^3}$$

$$e. f'(x) = \frac{3}{\sqrt{6x - 1}}$$

$$f. f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

6.

a. $f'(x) = (1 + x) \cdot e^x$

b. $f'(x) = (2x + x^2) \cdot e^x$

c. $f'(x) = (3x + 1) \cdot e^x$

d. $f'(x) = \frac{(x-1) \cdot e^x}{x^2}$

e. $f'(x) = \frac{2x - x^2}{e^{2x}}$

f. $f'(x) = 3 \cdot e^{3x}$

g. $f'(x) = 0,1 \cdot e^{0,1x+3}$

h. $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

7.

a. $f'(x) = \ln(x) + 1$

b. $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$

c. $f'(x) = 3 \cdot \frac{(\ln x)^2}{x}$

d. $f'(x) = \frac{3}{x}$

e. $f'(x) = \frac{2}{2x-5}$

f. $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

8.

a. $f'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b. $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

c. $f'(x) = 3 \cdot \cos(3x)$

d. $f'(x) = 6 \cdot \cos(2x + \pi)$

e. $f'(x) = -2x \cdot \sin(x^2)$

f. $f'(x) = 0$

9. $D = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$, $N = (-0,5/0)$, $a_1: x = 1,5$, $a_2: y = 1$

10. $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $N = H = (0/0)$, $T = (2/4)$, $a_1: x = 1$, $a_2: y = x + 1$

11. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $N_1 = (0/0)$, $N_2 = (-2/0)$, $a_1: x = -1$, $a_2: y = x + 1$

12. $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $N_1 = (-0,62/0)$, $N_2 = (1,62/0)$, $H = (1/1)$, $T = (3/5)$, $a_1: x = 2$, $a_2: y = x + 1$

13. $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $N_1 = (-0,73/0)$, $N_2 = (2,73/0)$, $H = (0/2)$, $T = (-2/6)$, $a_1: x = -1$, $a_2: y = -x + 3$

14. $D = \mathbb{R}$, $H = (0/2)$, $W_{1,2} = (\pm 0,58/1,5)$, $t_{W_{1,2}}: y = \mp 1,30x + 2,25$, $a: y = 0$

15. $D = \mathbb{R}$, $N = W_1 = (0/0)$, $H = (1/1)$, $T = (-1/-1)$, $W_{2,3} = (\pm 1,73/\pm 0,87)$,

$t_{W_1}: y = 2x$, $t_{W_{2,3}}: y = -0,25x \pm 1,30$, $a: y = 0$

16. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, $N_{1,2} = (\pm 1/0)$, $H = (0/0,25)$, $a_{1,2}: x = \pm 2$, $a_3: y = 1$

17. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$, $N = W = (0/0)$, $t_W: y = -\frac{x}{2}$, $a_{1,2}: x = \pm 2$, $a_3: y = 0$

18. $D = \mathbb{R}$, $T = (0/1)$

19. $D = \mathbb{R}$, $N = W = (0/0)$, $t_W: y = x$

20. $D = \mathbb{R}$, $N = (0/0)$, $T = (-1/-0,37)$, $W = (-2/-0,27)$, $t_W: y = -0,14x - 0,54$, $a: y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$)

21. $D = \mathbb{R}$, $N = T = (0/0)$, $H = (-2/0,54)$, $W_1 = (-3,41/0,38)$, $W_2 = (-0,59/0,19)$,

$t_{W_1}: y = 0,16x + 0,93$, $t_{W_2}: y = -0,46x - 0,88$, $a: y = 0$ ($x \rightarrow -\infty$)

22. $D = \mathbb{R}$, $N = (0/0)$, $H = (2/2,94)$, $W = (4/2,16)$, $t_W: y = -0,54x + 4,33$, $a: y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$)

23. $D = \mathbb{R}$, $N = T = (0/0)$, $H = (1/1,08)$, $W_1 = (0,29/0,38)$, $W_2 = (1,71/0,77)$,

$t_{W_1}: y = 1,84x - 0,16$, $t_{W_2}: y = -0,64x + 1,85$, $a: y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$)

24. $D = \mathbb{R}$, $H = (0/1)$, $W_{1,2} = (\pm 1/0,61)$, $t_{W_{1,2}}: y = \mp 0,61x + 1,21$, $a: y = 0$