Übungen: Integralrechnung

Stammfunktionen

1. Ermittle die Stammfunktion der folgenden Funktionen:

   a) $f(x) = 3 \cdot x$

   b) $f(x) = 8 \cdot x^3$

   c) $f(x) = \frac{x^2}{2}$

   d) $f(x) = x^2 - 5 \cdot x$

   e) $f(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1$

   f) $f(x) = 8 \cdot x^3 - 9 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 6$

   g) $f(x) = x^6 - 3 \cdot x^5 + 7 \cdot x^3$

   h) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{x}{4}$

   i) $f(x) = \frac{x^4}{10} - \frac{3x^2}{8} + \frac{2}{7}$

   j) $f(x) = \frac{2x^3}{5} + \frac{x^2}{4} - \frac{4x}{3}$

2. Ermittle die Gleichung der Funktion, wenn die Ableitung und ein Punkt des Funktionsgraphen gegeben ist.

   a) $f'(x) = 4 \cdot x$ P = (2/5)

   b) $f'(x) = 2 \cdot x - 3$ P = (1/0)

   c) $f'(x) = -6 \cdot x + 5$ P = (2/3)

   d) $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x$ P = (0/–4)

   e) $f'(x) = 6 \cdot x^2 - 5$ P = (–2/–5)

   f) $f'(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x$ P = (–2/1)

Geschwindigkeit und Beschleunigung

3. Eine Kugel wird aus großer Höhe fallen gelassen. Die Erdbeschleunigung beträgt ca. 10 m/s². (Der Luftwiderstand wird dabei vernachlässigt.)

   a) Leite die Formel $s(t) = 5 \cdot t^2$ für den freien Fall ab.

   b) Berechne, wie weit die Kugel in 4 Sekunden fällt.

4. Ein Auto fährt mit 36 km/h. Es beschleunigt 8 Sekunden lang mit a = 0,5 m/s².

   a) Erstelle die Funktionsgleichungen der Geschwindigkeits- und Wegfunktion.

   b) Berechne, welche Geschwindigkeit das Auto am Ende des Beschleunigungsvorgangs hat und welchen Weg es zurückgelegt hat.

5. Ein U-Bahnzug fährt mit 54 km/h. Er wird 3 s lang mit einer Bremsverzögerung von 2 m/s² abgebremst.

   a) Erstelle die Geschwindigkeits- und Wegfunktion.

   b) Berechne, wie hoch die Geschwindigkeit des Zugs am Ende des Bremsvorgangs ist und welchen Weg er währenddessen zurücklegt.

6. Ein PKW beschleunigt in 10 Sekunden von 0 auf 72 km/h. Die Beschleunigung ist konstant.
   a) Erkläre, wie du die Beschleunigung ermitteln kannst.
   b) Stelle die Geschwindigkeits- und Wegfunktion auf und berechne, welchen Weg das Auto in diesem Zeitraum zurücklegt.
7. Ein Auto fährt mit 108 km/h. Es wird mit einer Verzögerung von 6 m/s² bis zum Stillstand abgebremst.
   a) Erkläre, wie du die Bremsdauer berechnen kannast.
   b) Ermittle den Bremsweg.
8. Die Beschleunigung eines Läufers in den ersten Sekunden nach dem Start wird durch folgende Funktion beschrieben:
   $a(t) = 3 - 0{,}6 \cdot t$
   a) Erstelle die Funktionsgleichungen der Geschwindigkeits- und Wegfunktion.
   b) Berechne den Zeitpunkt, zu dem die Geschwindkgkeit des Läufers maximal ist, und die dazugehörige Geschwindigkeit.

(*) Elastische Linien

Eine der Aufgaben der technischen Mechanik besteht darin, die Durchbiegung eines belasteten Trägers zu berechnen. Bei den folgenden Beispielen liegt der Koordinatenursprung immer im linken Endpunkt des Trägers.

9. Ein 5 m langer Balken ist am linken Ende eingespannt und wird am rechten Ende belastet. Die Biegelinie kann durch den Graphen der Funktion w(x) angenähert werden, wobei $w''(x) = 0{,}0024 \cdot x - 0{,}012;\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0.$
   a) Ermittle die Gleichung der Biegelinie.
   b) Berechne den Durchhang und den Neigungswinkel im rechten Endpunkt. Zeige, dass die Funktion dort einen Wendepunkt hat.
10. Ein 4 m langer Träger ist am linken Ende eingespannt und wird auf der ganzen Länge gleichmäßig belastet. Die Gleichung der Biegelinie ergibt sich aus $w''(x) = -0{,}003 \cdot x^2 + 0{,}024 \cdot x - 0{,}048,\ w(0) = 0,\ w'(0) = 0.$
   a) Ermittle die Funktion w(x).
   b) Berechne den Durchhang und den Neigungswinkel im rechten Endpunkt. Zeige, dass die Funktion dort die Krümmung 0 hat.

11. Ein 2 m langes Regalbrett liegt an beiden Endpunkten auf und wird gleichmäßig belastet. Für die Gleichung der Biegelinie erhält man:

$w''(x) = -0{,}144 \cdot x^2 + 0{,}288 \cdot x,\ w(0) = 0,\ w(2) = 0.$

a) Ermittle die Funktion w(x).

b) Zeige, dass das Brett in der Mitte am stärksten durchhängt, und berechne den Durchhang.

c) Beweise, dass die Funktion an beiden Endpunkten des Bretts Wendepunkte hat. Wie groß ist dort der Neigungswinkel?

Bestimmtes Integral

12. Berechne die folgenden Integrale.

a) $\int_1^3 2 \cdot x\,dx$

b) $\int_{-2}^2 \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx$

c) $\int_1^4 (5 - x) dx$

d) $\int_1^3 x^2 dx$

e) $\int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} + 1\right) dx$

f) $\int_{-1}^1 (x^3 + 1) dx$

Flächenberechnungen

13. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse:

a) $f(x) = 4 \cdot x - x^2$

b) $f(x) = x^2 - x - 2$

c) $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x$

d) $f(x) = x^3 - 8 \cdot x^2 + 15 \cdot x$

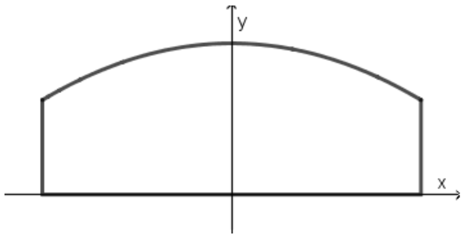
e) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \cdot x$

f) $f(x) = x^4 - 6 \cdot x^2 + 5$

14. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven:

a) $f(x) = x^2$	$g(x) = x + 6$
b) $f(x) = 4 \cdot x - x^2$	$g(x) = x$
c) $f(x) = x^2$	$g(x) = 4 \cdot x - x^2$
d) $f(x) = x^2$	$g(x) = x^3$
e) $f(x) = x^3 + 1$	$g(x) = 4 \cdot x + 1$
f) $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x$	$g(x) = 3 \cdot x - x^2$

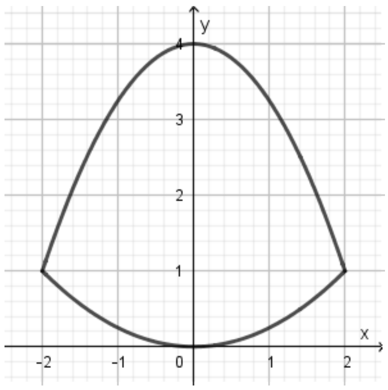
15. Ein Straßentunnel ist 10 m breit, in der Mitte 4 m und an den Seiten 2,5 m hoch. Der Tunnelquerschnitt hat die Form eines Rechtecks mit aufgesetzter Parabel (siehe Bild).



a) Ermittle die Gleichung der Parabel, wenn das Koordinatensystem wie in der Skizze angenommen wird.

b) Berechne die Fläche des Tunnelquerschnitts.

16. In einem neuen Kongresszentrum sollen Fenster eingebaut werden, die von zwei Parabeln begrenzt werden.



a) Ermittle die Gleichungen der Parabeln (lies die nötigen Informationen aus der Zeichnung ab; Maße in m).

b) Berechne den Flächeninhalt eines Fensters.

17. Die Querschnittsfläche eines Kanals wird von der Kurve begrenzt, die durch die Funktion $f(x) = 0{,}02 \cdot x^4 - 2$ beschrieben wird (Maße in m). Der Wasserspiegel liegt auf der x-Achse.

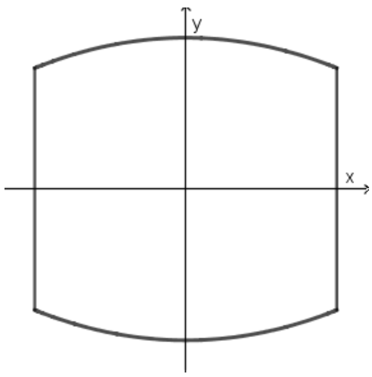
a) Ermittle die Breite des Kanals an der Wasseroberfläche.

b) Bestimme den Flächeninhalt des Kanalquerschnitts.

c) Berechne, wie viele Liter Wasser pro Sekunde durch den Kanal fließen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit 2,5 m/s beträgt.

(*) Volumen von Rotationskörpern

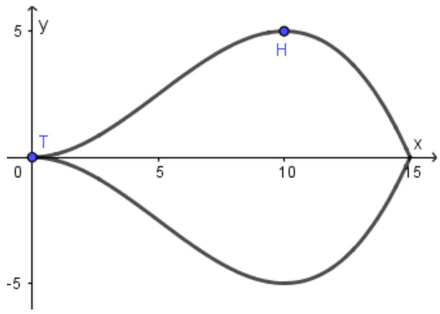
18. Ein Fass ist 10 dm lang, sein Durchmesser beträgt in der Mitte 10 dm und am Rand 8 dm. Die Fassdauben haben die Form einer Parabel.



a) Zeichne das Fass in ein geeignetes Koordinatensystem ein (siehe Skizze) und ermittle die Funktionsgleichung der Parabel.

b) Berechne das Volumen des Fasses in Liter.

19. Für eine Dekoration soll ein Glastropfen gegossen werden. Die Form entsteht, wenn der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades im Intervall [0; 15] um die x-Achse rotiert. Die Funktion hat den Tiefpunkt T = (0/0) und den Hochpunkt H = (10/5) (Maße in cm).



a) Ermittle die Gleichung der Funktion.

b) Berechne das Volumen und die Masse des Tropfens.
(Dichte von Glas: ρ = 2500 kg/m³)

20. Das Innere eines Trinkglases hat die Form eines Paraboloids. Es entsteht, wenn die Parabel $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$ um die y-Achse rotiert (Maße in cm).
Berechne, wie hoch die Flüssigkeit im Glas steht, wenn $\frac{1}{4}$ Liter (250 cm³) eingefüllt wird.

(*) Mittelwerte

21. Der Stromverbrauch einer Firma abhängig von der Tageszeit ist näherungsweise durch die folgende Funktion gegeben:

$E(t) = -0{,}24 \cdot t^2 + 2{,}4 \cdot t + 2$

(t: Zeit in Stunden seit 8 h, $0 \le t \le 10$; E: elektrische Leistung in kW)

a) Berechne den gesamten Stromverbrauch im Zeitraum von 8 h bis 18 h.

b) Gib die durchschnittliche elektrische Leistung an.

22. Der Temperaturverlauf im Lauf eines Tages kann näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$T(t) = 0{,}0009 \cdot t^4 - 0{,}05 \cdot t^3 + 0{,}8 \cdot t^2 - 2{,}7 \cdot t + 8$

(t: Uhrzeit in Stunden, $t \in [0; 24]$; T: Temperatur in °C)

a) Berechne, wann es am wärmsten war, und gib die Höchsttemperatur an.

b) Ermittle die Durchschnittstemperatur mithilfe der Integralrechnung.

c) In der traditionellen Meteorologie werden die Wetterdaten um 7 h, 14 h und 21 h gemessen („Mannheimer Stunden"). Für die Berechnung der Tagesmitteltemperatur wird der Wert von 21 h doppelt gerechnet.
Bestimme, welche Durchschnittstemperatur sich nach dieser Methode ergibt.

Ergebnisse:

1.

a) $F(x) = 3\cdot x^2/2 + c$

b) $F(x) = 2\cdot x^4 + c$

c) $F(x) = x^3/6 + c$

d) $F(x) = x^3/3 - 5\cdot x^2/2 + c$

e) $F(x) = x^3 + 2\cdot x^2 + x + c$

f) $F(x) = 2\cdot x^4 - 3\cdot x^3 + 3\cdot x^2/2 - 6\cdot x + c$

g) $F(x) = x^7/7 - x^6/2 + 7\cdot x^4/4 + c$

h) $F(x) = x^3/9 + x^2/8 + c$

i) $F(x) = x^5/50 - x^3/8 + 2\cdot x/7 + c$

j) $F(x) = x^4/10 + x^3/12 - 2\cdot x^2/3 + c$

2.

a) $f(x) = 2\cdot x^2 - 3$

b) $f(x) = x^2 - 3\cdot x + 2$

c) $f(x) = -3\cdot x^2 + 5\cdot x + 5$

d) $f(x) = x^3 - 2\cdot x^2 - 4$

e) $f(x) = 2\cdot x^3 - 5\cdot x + 1$

f) $f(x) = x^4/2 - 3\cdot x^2 + 5$

3. a) $a(t) = 10 \Rightarrow v(t) = 10\cdot t \Rightarrow s(t) = 5\cdot t^2$ b) 80 m

4. a) $v(t) = 0{,}5\cdot t + 10$, $s(t) = 0{,}25\cdot t^2 + 10\cdot t$ b) $v(8) = 14$ m/s = 50,4 km/h, $s(8) = 96$ m

5. a) $v(t) = -2\cdot t + 15$, $s(t) = -t^2 + 15\cdot t$ b) $v(3) = 9$ m/s = 32,4 km/h, $s(3) = 36$ m

6. a) $a = \frac{20}{10} = 2$ m/s² b) $v(t) = 2\cdot t$, $s(t) = t^2$, $s(10) = 100$ m

7.

a) Die Geschwindigkeitsfunktion muss ermittelt und gleich Null gesetzt werden.

b) 75 m

8.

a) $v(t) = 3\cdot t - 0{,}3\cdot t^2$, $s(t) = 1{,}5\cdot t^2 - 0{,}1\cdot t^3$

b) $t = 5$ s, $v(5) = 7{,}5$ m/s

9. a) $w(x) = 0{,}0004\cdot x^3 - 0{,}006\cdot x^2$ b) $w(5) = -0{,}1$, $w'(5) = -0{,}03$, $\alpha = 1{,}73°$; $w''(5) = 0$

10. a) $w(x) = -0{,}00025\cdot x^4 + 0{,}004\cdot x^3 - 96\cdot x^2$ b) $w(4) = -0{,}192$, $\alpha = -3{,}66°$, $w''(4) = 0$

11. a) $w(x) = -0{,}012\cdot x^4 + 0{,}048\cdot x^3 - 0{,}096\cdot x$ b) $w'(1) = 0$, $w(1) = -0{,}06$

c) $w''(0) = w''(2) = 0$; $k = \pm 0{,}096$, $\alpha = \pm 5{,}48°$

12.	a) 8	b) 4	c) 7,5	d) 8,67	e) 13,33	f) 2
13.	a) 10,67	b) 4,5	c) 6,75	d) 21,08	e) 13,5	f) 12,8
14.	a) 20,83	b) 4,5	c) 2,67	d) 1/12	e) 8	f) 3,08

15. a) $f(x) = -0{,}06\cdot x^2 + 4$ b) A = 35 m²

16. a) $f(x) = -0{,}75\cdot x^2 + 4$, $g(x) = 0{,}25\cdot x^2$ b) A = 10,67 m²

17. a) 6,32 m b) 10,12 m² c) 25300 L

18. a) $f(x) = -0{,}04\cdot x^2 + 5$ b) V ≈ 687 L

19. a) $f(x) = -0{,}01\cdot x^3 + 0{,}15\cdot x^2$ b) V = 511,2 cm²; m = 1,278 kg

20. 10,9 cm

21. a) 60 kWh b) 6 kW

22. a) ca. 14:20 h, 24,4 °C b) 16,1 °C c) 17,5 °C