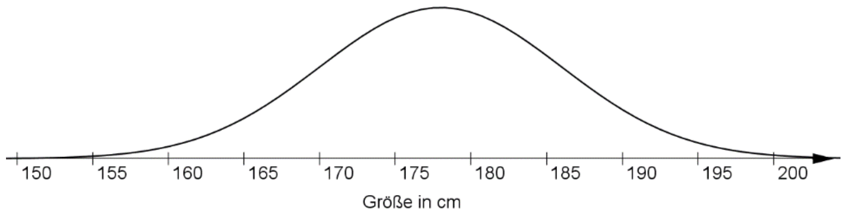
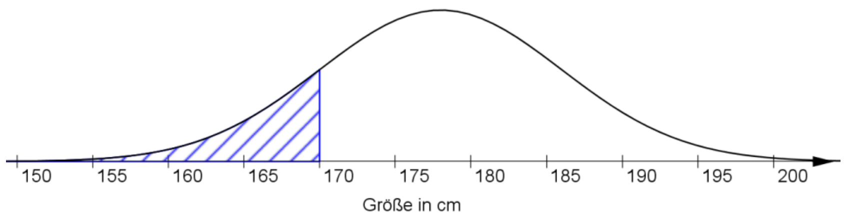
Normalverteilung (Übungen)

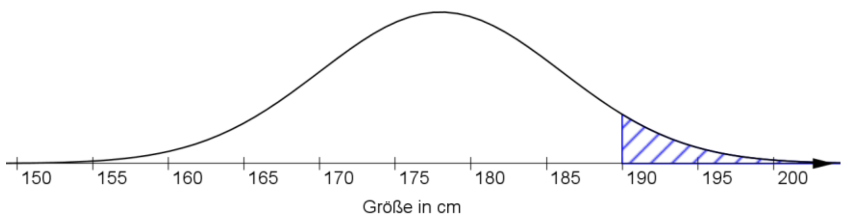
1. Die Körpergröße von österreichischen Männern ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 178$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 8$ cm. diese Verteilung ist hier grafisch dargestellt:

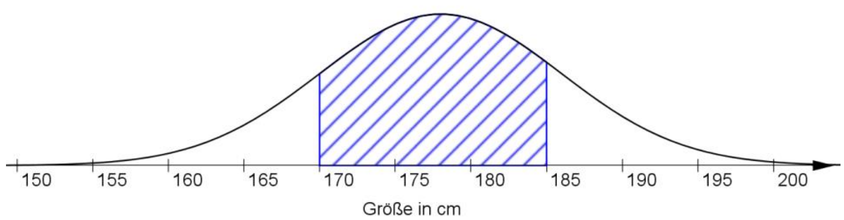


   a) Bei 18-jährigen Burschen ist der Erwartungswert etwas höher (180 cm) und die Standardabweichung etwas niedriger (6 cm). Skizziere die entsprechende Gaußkurve in der obigen Grafik.

   b) Lies ab, welche Wahrscheinlichkeiten den schraffierten Flächen in den folgenden Graphen entsprechen. Berechne diese Wahrscheinlichkeiten.







c) Ermittle, wie groß ein österreichischer Mann sein muss, damit er
   - zu den 20 % kleinsten gehört,
   - zu den 10 % größten gehört,

d) Gib ein um den Erwartungswert symmetrisches Intervall an, in dem die Größen von 95 % aller österreichischen Männer liegen.

2. Das Gewicht von neugeborenen Kindern in Österreich ist annähernd normalverteilt mit $\mu = 3300$ g und $\sigma = 575$ g.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes
   - mehr als 3000 g wiegt,
   - weniger als 2500 g wiegt,
   - zwischen 4000 und 5000 g wiegt.

   Stelle die Wahrscheinlichkeiten auch grafisch dar.

b) Wie schwer muss ein Neugeborenes sein, damit es
   - zu den 15 % schwersten,
   - zu den 25 % leichtesten gehört?

c) In welchem um μ symmetrischen Bereich liegen die Gewichte von 90% aller Neugeborenen?

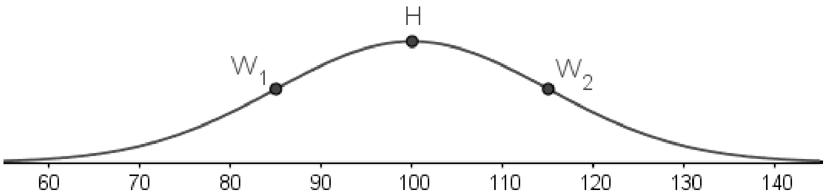
3. Die Äpfel in einer Lieferung wiegen durchschnittlich 180 g, mit einer Standardabweichung von 50 g. Man kann annehmen, dass das Gewicht eine normalverteilte Zufallsvariable ist.

a) Wieviel Prozent der Äpfel wiegen
   - weniger als 150 g,
   - mehr als 175 g,
   - zwischen 200 und 250 g?

b) 10% der Äpfel werden aussortiert, weil sie zu leicht sind. Wie schwer kann ein Apfel höchstens sein, wenn er aussortiert wird?

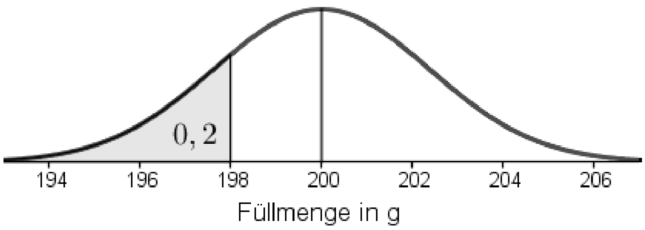
c) In welchem symmetrischen Bereich $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ liegen die Gewichte von 50% aller Äpfel?

4. Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert $\mu = 100$. Die Dichtefunktion ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



a) Lies aus der Abbildung die Standardabweichung ab.
b) Veranschauliche in der Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person einen IQ zwischen 90 und 120 hat. Berechne diese Wahrscheinlichkeit.
c) Welchen IQ muss man haben, um zu den intelligentesten 2% der Bevölkerung zu gehören?

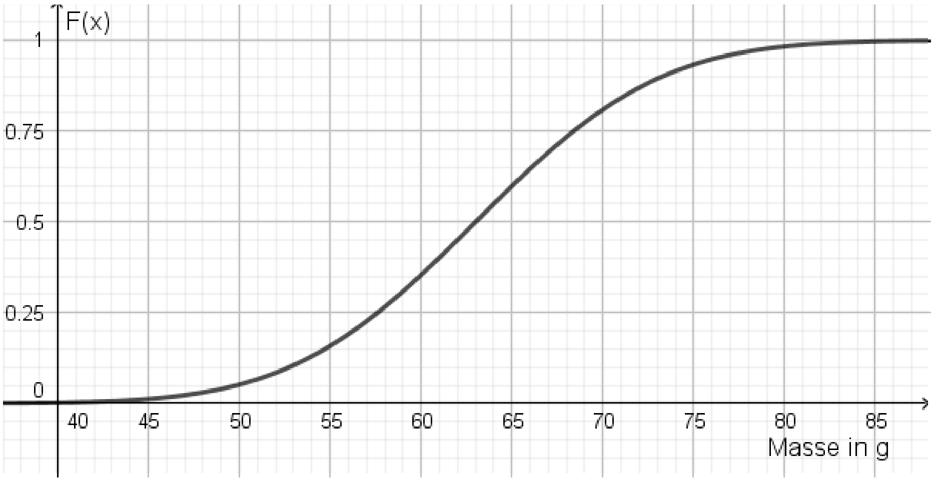
5. Nüsse werden in Säckchen verpackt. Das Füllgewicht ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 200$ g, die Dichtefunktion ist hier abgebildet.



a) Der Inhalt der grauen Fläche beträgt 0,2. Interpretiere diesen Wert im Sachzusammenhang.
b) Ermittle mithilfe der Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass ein Säckchen 198 g bis 200 g enthält.

6. Die durchschnittliche Schlafdauer von Erwachsenen ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 7{,}5$ h und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}9$ h.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ein Erwachsener weniger als 6 h schläft.
b) Erkläre, warum die Wahrscheinlichkeit für weniger als 6 h Schlaf genauso groß ist wie die Wahrscheinlichkeit für mehr als 9 h Schlaf.
c) Ermittle die Schlafdauer, die von 20 % aller Erwachsenen überschritten wird.

7. Die Masse der Eier in einem Legebetrieb ist annähernd normalverteilt. In der Abbildung ist der Graph der Verteilungsfunktion dargestellt.



a) Lies den Erwartungswert der Verteilung ab.
b) Veranschauliche in der Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ei zwischen 60 g und 70 g wiegt.

8. Eine Maschine erzeugt Holzplatten, die im Mittel 30 mm dick sind. Die Standardabweichung beträgt 0,6 mm.
a) Bei wieviel Prozent aller Platten liegt die Dicke zwischen 29,5 und 30,5 mm?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte dicker als 31 mm ist?

9. Die Lebensdauer eines Ersatzteils ist normalverteilt, mit $\mu = 180$ Tage und $\sigma = 40$ Tage.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer weniger als 3 Monate beträgt? (1 Monat = 30 Tage)
b) Bei wieviel Prozent aller Teile weicht die Lebensdauer um weniger als 1 Monat vom Ewartungswert ab?

10. Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 8{,}00$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}15$ cm.
a) Bei wieviel Prozent der Nägel weicht die Länge höchstens um $\varepsilon = 0{,}20$ cm vom Erwartungswert μ ab?
b) Wie sind die Toleranzgrenzen festgelegt, wenn man weiß, dass 90% der Produktion zum Verkauf freigegeben werden?

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

11. Eine faire Münze wird 80 mal geworfen. X ist die Anzahl der Würfe mit dem Ergebnis "Kopf".

a) Ermittle Erwartungswert und Standardabweichung für die Anzahl von „Kopf".

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, 36 bis 42 mal „Kopf" zu werfen,

- mit Binomialverteilung,
- mit Normalverteilung (ohne Stetigkeitskorrektur)
- mit Normalverteilung (mit Stetigkeitskorrektur).

c) Begründe, dass du hier mit Normalverteilung rechnen darfst.

d) Gib einen symmetrischen 90 %-Streubereich für die Anzahl von „Kopf" an.

12. 7% aller Eier werden beim Transport beschädigt. Ein Geschäft bekommt eine Lieferung von 1500 Eiern.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass 120 oder mehr Eier beschädigt sind.

b) In welchem symmetrischen Bereich liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der beschädigten Eier?

13. Die freiwillige Feuerwehr eines Ortes verfügt über 120 Feuerwehrleute, von denen jeder mit 60% Wahrscheinlichkeit sofort verfügbar ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Ernstfall mindestens 70 Feuerwehrleute zur Verfügung stehen?

b) Gib einen 90%-Streubereich $[\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon]$ für die Anzahl der verfügbaren Feuerwehrleute an!

14. Ein Passagierflugzeug hat 180 Plätze. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 90 % der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.

a) In welchem Bereich liegt mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?

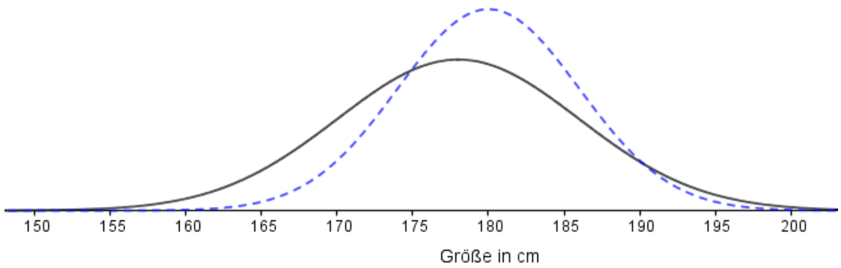
b) Um leere Plätze zu vermeiden, ist es üblich, dass die Flüge überbucht werden (d.h. es werden mehr Sitzplätze verkauft, als zur Verfügung stehen). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 10 %igen Überbuchung nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können?

c) (*) Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, wenn das Risiko, einen Passagier abweisen zu müssen, höchstens 1 % betragen soll?

Ergebnisse:

1.

a)



(etwas nach rechts verschoben, höher und schmäler)

b) P(X ≤ 170) = 0,1587; P(X ≥ 190) = 0,0668; P(170 ≤ X ≤ 185) = 0,6506

c) ≤ 171,3 cm; ≥ 188,3 cm

d) 162,3 cm bis 193,7 cm

2.

a) P(X > 3000) = 0,699; P(X < 2500) = 0,082; P(4000 < X < 5000) = 0,110

b) 3896 g; 2912 g

c) 2354 g bis 4246 g

3.

a) 27,41 %; 53,98 %; 26,38 %

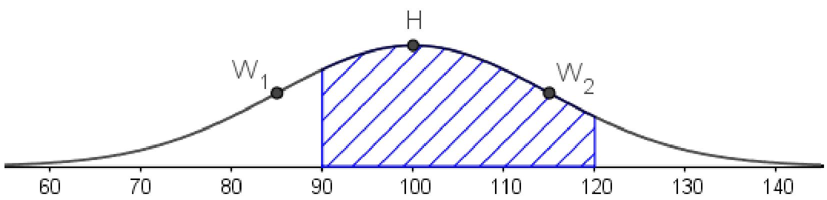
b) 116 g

c) 146 g bis 214 g

4.

a) σ = 15

b)



P(90 ≤ IQ ≤ 120) = 0,656

c) 131

5.

a) 20 % aller Säckchen enthalten weniger als 198 g.

b) 0,5 – 0,2 = 0,3 = 30 %

6.

a) 0,048

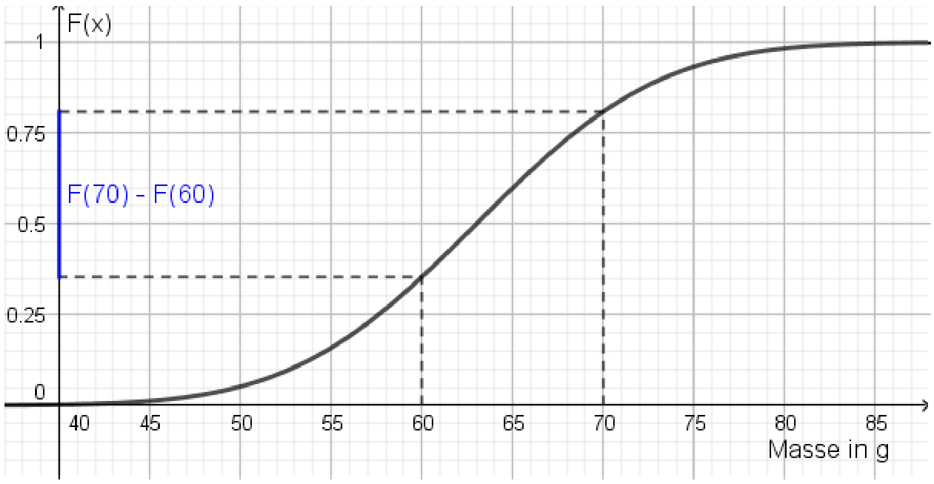
b) 6 h und 9 h liegen gleich weit vom Erwartungswert entfernt. Wegen der Symmetrie der Normalverteilung sind die beiden Wahrscheinlichkeiten gleich groß.

c) 8,26 h

7.

a) 63 g

b)



8.	a) 59,35 %	b) 0,0475
9.	a) 0,0122	b) 54,67 %
10.	a) 81,8 %	b) 8,00 ± 0,25 cm

Bei den folgenden Aufgaben sind die genauen Ergebnisse (mit Binomialverteilung) und in Klammern die Näherungen mit Normalverteilung (ohne / mit Stetigkeits-korrektur) angegeben.

11.

a) μ = 40, σ = 4,47

b) 0,5546 (0,4871 / 0,5548)

c) Man darf mit Normalverteilung rechnen, weil σ > 3 ist

d) 33 bis 47

12.	a) 0,0733 (0,0645 / 0,0711)	b) 85 bis 125	
13.	a) 0,6810 (0,6443 / 0,6808)	b) [63; 81]	
14.	a) [154; 170]	b) 0,3008 (0,2536 / 0,2929)	c) 190